Lineární algebra II - 3.4. CV 6

Součin vlastních čísel matice A je roven determinantu A. Součet vlastních čísel matice A je roven stopě A (součet prvků na diagonále).

Matice A a B jsou podobné, pokud existuje regulární matice R, že platí $A = RBR^{-1}$. Matice A je diagonalizovatelná, pokud je podobná diagonální matici D. Speciálně platí $A = RDR^{-1}$, kde D má na diagonále vlastní čísla matice A a R je matice složená z příslušných vlastních vektorů.

I) Určete vlastní čísla matice

$$K = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

.

II) U matice $H = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$ 3, -4 a 5. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

III) Nechť matice A a B mají společnou bázi z vlastních vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice A a $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ jsou vlastní čísla matice B. Dokažte, že také matice $A + B$ a AB mají stejnou bázi vlastních vektorů. Jaká jsou jejich vlastní čísla? Dále rozhodněte, zda platí $AB = BA$.

IV) Jak obecně spočítat k-tou mocninu diagonalizovatelné matice? Spočtěte tak druhou mocninu a odmocninu z následujících matic.

a) $\begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

V) Spočtěte vlastní čísla matice sousednosti úplného grafu na n vrcholech K_n. Matice incindence grafu je matice $n \times n$ indexovaná řádky i sloupce pomocí vrcholů grafu a obsahuje 1 když odpovídající vrcholy jsou spojené hranou a 0 jinak. Specálně diagonála je vždy nulová.

VI) Rozhodněte, zda jsou matice A a B podobné.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

VI) Nalezněte Jordanův tvar pro matici A.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$