Lineární algebra II - Písemka 7.5.

Určete Jordanův tvar následující matice, pokud víte, že má vlastní za vlastní číslo pouze 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ -5 & -7 & 2 & -6 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \\ 8 & 15 & -3 & 12 \end{pmatrix}$$

Lineární algebra II - Písemka 7.5.

Určete Jordanův tvar následující matice, pokud víte, že má vlastní za vlastní číslo pouze 2.

$$\begin{pmatrix} -9 & -20 & 3 & -14 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -7 & -13 & 4 & -9 \\ 6 & 12 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

Co s tim mám teď jako dělat?

Označme matici prvního zadáná A_1. Věříme zadání, že 2 je jediné vlastní číslo ($\lambda = 2$). To speciálně znamená, že hodnost matice je 4 a máme následující možnosti, jak může vypadat její Jordanův tvar:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} J_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} J_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pokračujme s výpočtem počtu buňek. Tedy zajímá $h(A_1) - h(A_1 - \lambda I)$.

$$h(A_1 - 2I) = h \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & -2 \\ -5 & -9 & 2 & -6 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 8 & 15 & -3 & 10 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Tedy A_1 má $4 - 2 = 2$ Jordanovy buňky. Víme tedy, že výsledný tvar je J_3 nebo J_4. Zajímá nás teď počet buněk velikosti alespoň dva (abychom rozhodli, zda J_3 nebo J_4), který se vypočte jako $h(A_1 - \lambda I) - h((A_1 - \lambda I)^2)$. Bacha, pro mocnění je nutné vzít skutečně $(A_1 - \lambda I)$ a ne to, co z toho zbyde po úpravách při výpočtu hodnosti $(A_1 - \lambda I)$!!!

$$(A_1 - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tedy $h((A_1 - \lambda I)^2) = 0$. To znamená, že Jordanův tvar má dvě buňky velikosti alespoň 2 a tudíž to musí být J_3.

U výpočtu pro A_2 se postupuje obdobně. Také zjistíme, že máme dvě buňky. Můžeme si však ušetři čas u násobení. Víme, že $h(A_1 - \lambda I) - h((A_1 - \lambda I)^2) \geq 1$, protože v obou případech J_3 a J_4 je buňka velikosti aspoň dva. A v případě

- J_3 platí $h(A_1 - \lambda I) - h((A_1 - \lambda I)^2) = 2$ a tedy $h((A_1 - \lambda I)^2) = 0$
- J_4 platí $h(A_1 - \lambda I) - h((A_1 - \lambda I)^2) = 1$ a tedy $h((A_1 - \lambda I)^2) = 1$

$$(A_2 - 2I)^2 = \begin{pmatrix} -4 & -7 & 1 & -5 \\ -4 & -7 & 1 & -5 \\ -4 & -7 & 1 & -5 \\ 8 & 14 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

Speciálně když budeme násobení provádět a narazíme na první nenulový prvek, víme, že už hodnost matice $(A_2 - 2I)$ nemůže být 0 a lze oznámit výsledek J_4. Pozor, nelze říci, že když vyjde první řádek nulový nebo dokonce prvek na první pozici nulový, tak bude hodnost 0 a oznámit výsledek J_3 - to by bylo chubně. V takovém případě je nutné matici dopočítat až do samého konce a ujistit se, že je skutečně celá nulová.