Lineární algebra II - 2.4. CV 5

O λ řekneme, že je *vlastní číslo* čtvercové matice A, pokud existuje vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ splňující rovnici $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ Vlastní čísla λ_i jsou kořeny charakteristického polynomu $p_A(t) = |A - tI|$.

Vlastní vektory příslušné danému λ_i splňují rovnost $A\mathbf{x} = \lambda_i\mathbf{x}$, neboli jsou řešením homogenní soustavy $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Matice řádu n je diagonalizovatelná právě když má n vlastních čísel a prostory vlastních vektorů mají dimenze rovny algebraickým násobnostem příslušných vlastních čísel.

Součin vlastních čísel matice A je roven determinantu A.

Součet vlastních čísel matice A je roven stopě A (součet prvků na diagonále).

I) Následující matice jsou matice zobrazení v rovině ($\mathbb{R}^2$). Nalezněte jeji vlastní čísla a vlastní vektory a pokuste se interpretovat jejich geometrciký význam.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

II) Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic nad tělesem $\mathbb{C}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

III) Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matic nad tělesem $\mathbb{C}$. Určete, zdali jsou tyto matice diagonalizovatelné.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

IV) Určete vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

V) U matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$ známe vlastní čísla $3, -4$ a 5. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

VI) Nalezněte dvě matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, pro které $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ nemá vlastní čísla rovná součtům vlastních čísel $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ a ani $\mathbf{AB}$ nemá vlastní čísla rovná součinům vlastních čísel $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$. Dokážete něco říci o vlastních číslech matic $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ a $\mathbf{AB}$?