Lineární algebra II - 4.3. CV 1

Připomenutí: Pro matici $A \in T^{n\times n}$ definuje determinant

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}.$$

Nikdo ho ta ale nepočítá pro matice větší, než 3×3. Počítá se podobně, jako Gaussova eliminace, ale

- prohození řádků mění znaménko determinantu
- nelze násobit řádek číslem, lze pouze vytýkat
- operace lze dělat i na sloupce

Operace nelze provádět papalelně. Musí být serializovatelné. Pro rozvoj determinantu podle i-tého řádku označme $A_{i,j}$ matici vzniklou z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,j} \det(A_{i,j}).$$

Hodí se, pokud má matice v řádku či sloupci jen jeden nenulový prvek.

I) Spočtěte následujících determinanty.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 0.8 & \pi \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 4/5 & 3/5 & -3/5 & 2/5 \\ 2/3 & 1 & 0 & 1/3 \\ -1 & 5/4 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

II) Trochu zajímavější determinanty. Matice berte jako $n \times n$.

a) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & \dots & -(n-1) & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ -1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ b & a & b & \dots & b & b \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ b & b & b & \dots & a & b \\ b & b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$

III) Spočtěte následující determinant matice velikosti $2n \times 2n$ a) jak umíte b) rozvojem podle řádků či sloupců. Příklad pro $n = 3$.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$
