

Základy kombinatoriky a teorie grafů — 5. cvičení*

23. března 2016

1 Grafová souvislost

Hranový řez grafu $G = (V, E)$ je množina hran $F \subseteq E$ taková, že graf $(V, E \setminus F)$ je nesouvislý. *Vrcholový řez grafu* $G = (V, E)$ je množina vrcholů $A \subseteq V$ taková, že graf $(V \setminus A, E \cap \binom{V \setminus A}{2})$ je nesouvislý. *Hranová souvislost* $k_e(G)$ grafu $G = (V, E)$ je velikost nejmenšího hranového řezu v G . *Vrcholovou souvislost* $k_v(G)$ grafu $G = (V, E)$ definujeme jako $k - 1$, je-li G úplný graf K_k , a jako velikost nejmenšího vrcholového řezu jinak. Graf je *hranově k -souvislý*, pokud platí $k_e(G) \geq k$ a *vrcholově k -souvislý*, pokud platí $k_v(G) \geq k$.

Z přednášky víme, že odebráním hrany vrcholová ani hranová souvislost nevzroste a klesne nejvýš o jedna.

Příklad 1. Najděte příklad grafu G , ve kterém lze odebrat vrchol tak, že

- hranová souvislost klesne (vzroste) o libovolně velké předem dané číslo.
- vrcholová souvislost G vzroste o libovolně velké předem dané číslo. O kolik může vrcholová souvislost klesnout po odebrání vrcholu?

Příklad 2. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme jako \mathbb{B}^k množinu binárních řetízků délky k . Uvažme graf $Q_k = (V, E)$, nazývaný k -krychle, ve kterém $V = \mathbb{B}^k$ a $\{u, v\} \in E$ právě tehdy, když se řetízky u a v liší na právě jedné pozici. Ukažte, že $k_v(Q_k) = k$.

Příklad 3. Graf je k -regulární, má-li všechny stupně rovné k .

- Ukažte, že pro každé $k \geq 2$ je každý k -regulární souvislý bipartitní graf vrcholově 2 -souvislý.
- Je pro $k \geq 2$ každý k -regulární (ne nutně bipartitní) souvislý graf vrcholově 2 -souvislý?
- Co když v příkladu nahradíme vrcholovou souvislost hranovou?

Příklad 4. Bud' G kriticky 2 -souvislý graf, to znamená, že je vrcholově 2 -souvislý, ale žádný z grafů $G - e$ pro libovolné $e \in E(G)$ není vrcholově 2 -souvislý.

- Dokažte, že alespoň jeden vrchol G má stupeň 2 .
- Pro každé n uveděte příklad kriticky 2 -souvislého grafu s vrcholem stupně alespoň n .

Příklad 5. Orientovaný graf G je silně souvislý, pokud pro každé jeho dva vrcholy u a v existují orientované cesty z u do v a z v do u .

- Ukažte, že orientovaný graf je silně souvislý právě tehdy, když existuje alespoň jedna hrana opouštějící každou neprázdnou podmnožinu vrcholů $X \subset V$.
- Ukažte, že každý turnaj (orientace úplného grafu) je silně souvislý právě tehdy, když obsahuje orientovaný Hamiltonovský cyklus.

*Informace o cvičení najeznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>