

Diskrétní matematika — příklady na 9. cvičení*

2. prosince 2015

1 Úvod do teorie grafů

(Neorientovaný) graf G je uspořádaná dvojice (V, E) , kde V je neprázdná množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran. Důležitými grafy jsou například

- úplný graf na n vrcholech $K_n = (V, \binom{V}{2})$, $|V| = n$,
- cyklus $C_n = (\{1, \dots, n\}, \{\{i, i+1\}: i = 1, \dots, n-1\} \cup \{\{1, n\}\})$,
- cesta $P_n = (\{1, \dots, n\}, \{\{i, i+1\}: i = 1, \dots, n-1\})$,
- úplný bipartitní graf $K_{m,n}$, kde $m, n \geq 1$, $V = \{u_1, \dots, u_m\} \cup \{v_1, \dots, v_n\}$ a $E = \{\{u_i, v_j\}: i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$.

Graf H je podgrafem grafu G , pokud $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$. Stupeň vrcholu v je počet hran grafu G obsahujících vrchol v , značíme jej $\deg_G(v)$. Graf G je souvislý, pokud v něm pro každé jeho dva vrcholy u, v existuje cesta z u do v . Řekneme, že grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ jsou izomorfní, pokud existuje bijekce $f: V \rightarrow V'$ taková, že platí $\{u, v\} \in E$ právě tehdy, když $\{f(u), f(v)\} \in E'$. Jako doplněk grafu G značíme graf \overline{G} , který má hrany právě mezi těmi vrcholy, mezi kterými je G nemá.

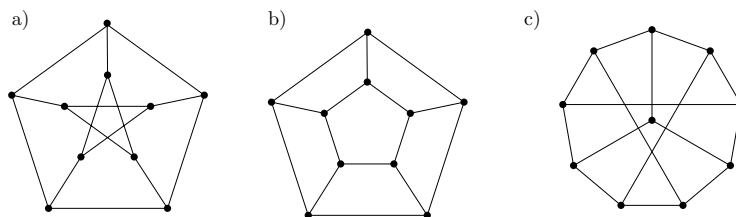
Jako Hamiltonovskou kružnici v grafu G nazveme kružnici v G , která prochází všemi vrcholy G . Podobně Hamiltonovská cesta v G je cesta obsahující všechny vrcholy grafu G . Graf, který má všechny vrcholy stupně rovné $k \in \mathbb{N}_0$, se nazývá k -regulární.

Příklad 1. Existuje graf s alespoň dvěma vrcholy, jehož vrcholy by měly všechny stupně různé?

Příklad 2. Najděte všechny neizomorfní grafy na 4 vrcholech.

Příklad 3. Dokažte, že doplněk každého nesouvislého grafu je souvislý. Musí to platit obráceně? Tedy musí být každý graf se souvislým doplňkem nesouvislý?

Příklad 4. Které z následujících grafů jsou izomorfní?



Příklad 5. Necht' máme $m, n, k \in \mathbb{N}$.

(a) Spočítejte počet cyklů délky k v grafu K_n .

(b) Spočítejte počet cyklů délky k v grafu $K_{m,n}$.

Příklad 6. Ukažte, že každý graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň alespoň d , obsahuje cestu na $d+1$ vrcholech jako podgraf.

Příklad 7. Sestrojte nekonečně mnoho grafů, které jsou izomorfní svému doplňku.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>