

Diskrétní matematika — 2. cvičení*

14. října 2015

1 Částečná uspořádání

Relace \preceq na X se nazývá (částečné) *uspořádání*, jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní. Pár (X, \preceq) se nazývá *částečně uspořádaná množina*.

Máme-li nějaké částečné uspořádání \preceq , tak můžeme definovat odvozenou relaci *ostré nerovnosti* \prec takto: $a \prec b$ právě tehdy, když $a \preceq b$ a $a \neq b$. Také lze definovat *obrácenou nerovnost*, tedy relaci \succeq , vztahem $a \succeq b \Leftrightarrow b \preceq a$.

Hasseův diagram je znázornění částečně uspořádané množiny (X, \preceq) , kde každý prvek množiny X tvoří bod (vrchol). Dva vrcholy x a y se spojí čarou (hranou) vedenou zdola nahoru od x k y , jestliže $x \prec y$ a neexistuje $z \in X$ takové, že $x \prec z \prec y$.

Částečné uspořádání \preceq na X je *lineární*, pokud pro každé $x, y \in X$ platí $x \preceq y$ nebo $y \preceq x$.

Prvek $a \in X$ nazýváme *minimálním prvkem* (X, \preceq) , pokud neexistuje žádné $x \in X$ takové, že $x \prec a$. *Maximální prvek* a je definován podobně (neexistuje žádné $x \succ a$).

Prvek $a \in X$ nazýváme *nejmenším prvkem* (X, \preceq) , jestliže pro každé $x \in X$ platí $a \preceq x$. Podobně definujeme *největší prvek* ($x \preceq a$ pro každé $x \in X$).

Příklad 1. Uvažme relaci \preceq na množině \mathbb{R}^3 definovanou předpisem

$$(a_1, b_1, c_1) \preceq (a_2, b_2, c_2) \Leftrightarrow a_1 \geq a_2, b_1 \geq b_2, c_1 \leq c_2.$$

Jedná se o částečné uspořádání?

Příklad 2. Nakreslete Hasseův diagram částečně uspořádané množiny $(2^{\{a,b,c,d\}}, \subseteq)$ (uspořádání inkluzí).

Příklad 3. (a) Ukažte, že největší prvek je maximální, a ukažte příklad uspořádané množiny, která má maximální prvek, ale nemá největší prvek.

(b) Uvažme uspořádanou množinu (\mathbb{N}, \preceq) , kde $x \preceq y \Leftrightarrow y \mid x$ (tj. x je dělitelné prvkem y). Rozhodněte, zda má nejmenší prvek. Má minimální? Maximální? Největší?

Příklad 4. Dokažte, že pro konečné X každá částečně uspořádaná množina (X, \preceq) obsahuje minimální prvek.

Příklad 5. Dokažte, že pro lineárně uspořádané množiny je každý minimální prvek rovněž nejmenší.

Příklad 6. Necht (X, \preceq) , (Y, \preceq) jsou uspořádané množiny. Říkáme, že jsou izomorfní, pokud existuje bijekce $f: X \rightarrow Y$ taková, že pro každé $x, y \in X$ platí $x \preceq y$ právě tehdy, když $f(x) \preceq f(y)$.

(a) Nakreslete všechny navzájem neizomorfní tříprvkové částečně uspořádané množiny.

(b) Dokažte, že každé dvě n -prvkové lineárně uspořádané množiny jsou navzájem izomorfní.

(c) Najděte dvě navzájem neizomorfní lineární uspořádání množiny \mathbb{N} .

2 Funkce

Zobrazení (respektive funkce) $f: X \rightarrow Y$ je relace $f \subseteq X \times Y$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$, které je v relaci f s x . Funkce $f: X \rightarrow Y$ je

(a) *prostá* (neboli *injektivní*), pokud $f(x) \neq f(x')$ pro každé $x \neq x'$, $x, x' \in X$;

(b) *na* (neboli *surjektivní*), pokud pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$;

(c) *vzájemně jednoznačná* (neboli *bijektivní*), pokud je prostá a na.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

Jsou-li $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$ funkce, pak jejich *složení* označujeme jako $g \circ f$ a jedná se o funkci $h: X \rightarrow Z$ danou předpisem $x \mapsto g(f(x))$. Všimněte si, že skládání je značené jinak než u relací!

Příklad 7. Najděte příklad

- (a) prosté funkce $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, která není na,
- (b) funkce $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, která je na, ale není prostá.

Příklad 8. Necht' $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$ jsou zobrazení. Necht' $g \circ f$ je prosté.

- (a) Rozhodněte, zda f musí být prosté.
- (b) Rozhodněte, zda g musí být prosté.